

Espacios Vectoriales

Definición 1 Llamaremos espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} a un conjunto V con dos operaciones: una suma $(+)$ $V \times V \rightarrow V$ (interna) y un producto (\cdot) $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ (externa) que verifican las siguientes propiedades:

1. $(V, +)$ tiene estructura de grupo abeliano.

2. La operación externa (\cdot) verifica:

(a) $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$ para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\vec{v}, \vec{w} \in V$.

(b) $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ para $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $\vec{v} \in V$.

(c) $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$ para $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $\vec{v} \in V$.

(d) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ para $\vec{v} \in V$ (siendo 1 la unidad en \mathbb{K}).

Representaremos por $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ al espacio vectorial y llamaremos *vectores* a los elementos de V y *escalares* a los elementos de \mathbb{K} .

Ejemplos:

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ es el espacio vectorial real n -dimensional.
- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot, \mathbb{K})$ es el espacio vectorial n -dimensional sobre \mathbb{K} .
- Si \mathcal{P} es el conjunto de polinomios con coeficientes reales, entonces $(\mathcal{P}, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.
- Las matrices $m \times n$ definidas sobre cualquier cuerpo \mathbb{K} también forman un espacio vectorial (sobre el mismo cuerpo \mathbb{K}).

Teorema 1 En todo Espacio vectorial se tienen las siguientes propiedades:

a) $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

b) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

c) Si $\lambda\vec{v} = \vec{0}$, entonces $\lambda = 0$ y/o $\vec{v} = \vec{0}$

d) $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$

e) $(-\lambda)\vec{v} = \lambda(-\vec{v}) = -(\lambda\vec{v})$

Combinación lineal. Será todo vector de la forma

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y $\vec{v}_i \in V$.

Nota.-

- Todo vector es combinación lineal de sí mismo.
- El vector $\vec{0}$ es combinación de cualquier conjunto de vectores.

Dependencia e Independencia lineal

Si $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es un conjunto finito de vectores (sistema de vectores) de V , diremos que son *linealmente dependientes (l.d.)* si existe una combinación lineal de ellos

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

con al menos un $\lambda_i \neq 0$.

En caso de que toda la combinación lineal igualada a $\vec{0}$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, decimos que los vectores son *linealmente independientes (l.i.)*.

Ejemplos.-

- En el e.v. de las funciones reales $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ los conjuntos de vectores $\{1, x, x^2\}$ y $\{\sin x, \cos x\}$ son l.i. En cambio $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$ son l.d.

- En los e.v. \mathbb{K}^n , si tenemos un sistema de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ podemos construir la matriz A formada por dichos vectores puestos en columna. Entonces el máximo número de vectores independientes de S coincide con el rango de la matriz A .

Así en \mathbb{R}^4 el conjunto de vectores

$$\{(1, 2, 4, 3), (-2, -1, 1, 0), (3, 3, 3, 3)\}$$

es l.d. porque la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ tiene rango 2.

Teorema 2 Sea V un e.v., entonces:

1. Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\{\vec{v}\}$ es l.i.
2. Todo sistema de vectores que contenga el $\vec{0}$ es l.d.
3. Si S es un sistema de vectores l.i. y $S' \subseteq S$, entonces S' es l.i.
4. Si S es un sistema de vectores l.d. y $S \subseteq S'$, entonces S' es l.d.
5. Si S es un sistema de vectores, no todos nulos, l.d., entonces al menos uno de los vectores se puede expresar como combinación de los restantes.
6. Si S es un sistema de vectores l.i. y $S \cup \{\vec{v}\}$ es l.d., entonces \vec{v} es combinación lineal de los vectores de S .

Subespacios Vectoriales

Dado un e.v. V y $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$, diremos que es subespacio vectorial (s.v) si verifica:

- a) para cada $\vec{v}, \vec{w} \in W$ se tiene $\vec{v} + \vec{w} \in W$.
- b) para cada $\vec{v} \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene $\lambda\vec{v} \in W$.

O equivalentemente,

$$\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \in W \text{ para cada } \lambda, \mu \in \mathbb{K} \text{ y } \vec{v}, \vec{w} \in W$$

Obsérvese que $\{\vec{0}\}$ es s.v. (subespacio trivial). Un s.v. $W \subset V$ diremos que es *subespacio propio*.

Ejemplos.-

- Si $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, y) \mid y = mx\}$, siendo m un número real, es s.v.
- Si $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0\}$, siendo a, b, c números reales, es s.v.
- Si $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$ no es s.v.
- Si $V = \mathcal{P}$ es el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, entonces $W = \mathcal{P}_n$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que n es s.v.

Teorema 3 Dado un sistema de vectores $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, el conjunto $L(S)$ formado por todas sus posibles combinaciones lineales de los vectores de S forman un subespacio vectorial de V .

Definición 2 A este subespacio vectorial $L(S)$ se le llamará subespacio generado por el conjunto de vectores S . Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es dicho conjunto se representa por $L(S) = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle$.

Definición 3 Si W es un s.v. de V y S es un sistema de vectores tal que $L(S) = W$ decimos entonces que S es un **sistema generador** de W .

Ejemplos:

- Si $V = \mathbb{R}^4$ y $W = \langle (1, 2, 0, 0), (0, 3, -1, 0) \rangle$, entonces los vectores de W son de la forma:

$$(x, y, z, t) = \lambda(1, 2, 0, 0) + \mu(0, 3, -1, 0)$$

donde λ y μ son números reales cualesquiera.

- En el e.v. \mathcal{P} de los polinomios con coeficientes reales, los vectores $S = \{1 - x, 1 + x^2, 2x + x^2\}$ es un sistema generador del s.v. \mathcal{P}_2 de los polinomios de grado menor o igual que 2.

Para ver esto comprobamos que cualquier polinomio de la forma $a + bx + cx^2$ es combinación lineal de los vectores de S , puesto que

$a + bx + cx^2 = \lambda(1 - x) + \mu(1 + x^2) + \gamma(2x + x^2)$
nos plantea el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

que es compatible.

Además, es evidente que cualquier polinomio de grado mayor que 2 no puede ser expresado como combinación lineal de los vectores de S .

Intersección de subespacios

Dada una familia $\{V_i\}$ de subespacios de V , la intersección

$$\bigcap_i V_i = \{x \in V \mid x \in V_i \text{ para cada } i\}$$

es también un subespacio vectorial de V .

Teorema 4 Si S es un sistema de vectores de V , entonces $L(S)$ es la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen a S .

Es decir $L(S)$ es el "menor" subespacio vectorial que contiene a S .

Bases y dimensión

Definición 4 Llamaremos base de un espacio vectorial V a un sistema de vectores \mathcal{B} linealmente independiente que es un sistema generador de V , es decir $L(\mathcal{B}) = V$.

Ejemplos.-

1. En los e.v. \mathbb{K}^n , el sistema de n vectores
 $\{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0) \dots (0, 0, \dots, 0, 1)\}$
es una base, a la que llamaremos **base canónica**.
2. En el e.v. \mathcal{P}_n los polinomios $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ forman una base.
3. Los e.v. de los polinomios \mathcal{P} admiten una base infinita numerable $\{1, x, x^2, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots\}$.
4. En \mathbb{Z}_5^3 tenemos que el sistema
 $\{(0, 1, 0), (0, 2, 3), (4, 1, 3)\}$
forma una base.
5. En el subespacio de \mathbb{R}^4 siguiente
 $W = \langle (1, 2, 4, 3), (-2, -1, 1, 0), (3, 3, 3, 3) \rangle$
una base de W estaría formada por cualesquiera dos vectores del sistema generador.

Nos interesan especialmente los e.v. con bases finitas.

Teorema 5 Si un e.v. admite una base finita con n vectores entonces todas las bases tienen exactamente n vectores.

Definición 5 Si un e.v. tiene una base finita de n vectores decimos que es de **dimensión finita**. Al número natural n lo llamaremos **dimensión del espacio**. Aceptamos que el e.v. trivial $\{\vec{0}\}$ es el único espacio de dimensión 0.

Teorema 6 Si $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial, cada vector \vec{v} del espacio se puede expresar **de forma única** como combinación lineal de los vectores de \mathcal{B}

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$$

y se dice que $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ son las **coordenadas** de \vec{v} respecto de la base \mathcal{B} .

Cambio de base

Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ son bases de un mismo e.v. V , un vector \vec{v} tendrá coordenadas distintas respecto de cada una de las bases, así

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \quad (*) \\ \vec{v} &= \mu_1 \vec{w}_1 + \mu_2 \vec{w}_2 + \dots + \mu_n \vec{w}_n \end{aligned}$$

Además cada vector $\vec{v}_i \in \mathcal{B}_1$ tiene unas coordenadas respecto de \mathcal{B}_2 , así

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= a_{11} \vec{w}_1 + a_{21} \vec{w}_2 + \dots + a_{n1} \vec{w}_n \\ \vec{v}_2 &= a_{12} \vec{w}_1 + a_{22} \vec{w}_2 + \dots + a_{n2} \vec{w}_n \\ &\vdots \\ \vec{v}_n &= a_{1n} \vec{w}_1 + a_{2n} \vec{w}_2 + \dots + a_{nn} \vec{w}_n \end{aligned}$$

que sustituyendo en la ecuación (*) y desarrollando se tiene

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n} \\ \mu_2 &= \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n} \\ &\vdots \\ \mu_n &= \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \dots + \lambda_n a_{nn} \end{aligned}$$

que en forma matricial se expresa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

donde la matriz A resultante se denomina **matriz del cambio de base** de \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2 .

Nota.- Obsérvese que $A\vec{\lambda} = \vec{\mu} \iff A^{-1}\vec{\mu} = \vec{\lambda}$, de donde A^{-1} será entonces la matriz del cambio de base de \mathcal{B}_2 a \mathcal{B}_1 .

Ejercicios.-

1. Fija dos bases distintas para el e.v. generado por el sistema de vectores

$$\{(1, 2, 4, 3), (-2, -1, 1, 0), (2, 4, 8, 6)\}$$

y determina, de entre los siguientes vectores, los que pertenecen a dicho espacio y qué coordenadas tienen respecto de cada una de las bases.

- a) $(2, 1, 4, 3)$ b) $(1, 2, 4, 3)$
c) $(5, 4, 2, 3)$ d) $(3, 2, -1, 3)$

2. Encuentra las coordenadas del vector $(3, 1, 2)$ sobre las siguientes bases de \mathbb{Z}_5^3 :

(a) La base canónica $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

(b) La base $\{(0, 1, 0), (0, 2, 3), (4, 1, 3)\}$.

3. Si sabemos que un vector de \mathbb{R}^4 tiene por coordenadas $(1, -1, 2, 0)$ respecto de la base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4)\}$$

calcula las coordenadas del mismo vector respecto de la base

$$\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}.$$

4. Si un vector de \mathbb{R}^2 tiene coordenadas $(2, -3)$ respecto de la base $\{(3, -1), (0, 3)\}$, encuentra una base en la que tenga por coordenadas $(1, 1)$.

Ecuaciones cartesianas y paramétricas

En los e.v. \mathbb{K}^n podemos representar los subespacios de las siguientes dos formas:

Ecuaciones Cartesianas: Dar restricciones a las coordenadas de los vectores del espacio para que pertenezcan al subespacio.

Ejemplo.- Un subespacio de \mathbb{R}^4 está definido por vectores (x, y, z, t) definidos por las siguientes coordenadas cartesianas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2t = z \\ z - y = t \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nos da como subespacio

$$W = \{(-\beta, \alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

de donde $W = \langle (-1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle$.

Ecuaciones paramétricas: Expresar las coordenadas de los vectores del subespacio en función de parámetros que pueden tomar cualquier valor de los escalares en el cuerpo.

Ejercicio.- Las ecuaciones paramétricas del subespacio W definido en el ejercicio anterior son:

$$\left. \begin{array}{l} x = -\beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{array} \right\}$$

Suma de subespacios

Dados dos s.v. V_1 y V_2 de V , se define

$$V_1 + V_2 = \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \mid \vec{v}_1 \in V_1 \text{ y } \vec{v}_2 \in V_2\}$$

que es un "nuevo" subespacio vectorial que contiene a $V_1 \cup V_2$. Obsérvese que la simple unión de subespacios no es subespacio vectorial.

Ejercicio.- Dados $V_1 = \langle (1, 2, -1, 0), (2, 0, 0, -1) \rangle$ y $V_2 = \langle (3, 2, -1, -1), (1, 0, 0, 1) \rangle$, determina las ecuaciones cartesianas y paramétricas del s.v. $V_1 + V_2$ de \mathbb{R}^4 .

Definición 6 Si $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$, a la suma de subespacios la llamaremos *suma directa de subespacios* y se representa $V_1 \oplus V_2$.

Teorema 7

1. Si V y W son subespacios tales que $W \subseteq V$, entonces

$$\dim W \leq \dim V$$

2. Si W_1, W_2 son s.v. de V , de dimensión finita, se tiene

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

En particular

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

Ejercicios.-

- Dado el subespacio de \mathbb{R}^4

$$W_1 = \langle (1, 2, 4, 3), (-2, -2, 0, 1), (3, 4, 4, 2) \rangle$$

encuentra una base para el espacio complementario W_2 en \mathbb{R}^4 , es decir $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^4$.

- Si sabemos que $\dim W_1 = \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2)$, ¿podemos afirmar que $W_1 = W_2$?